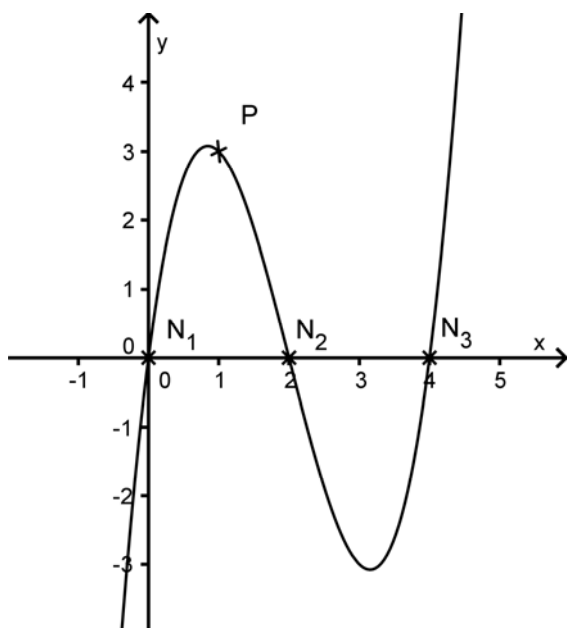


Abituraufgaben Grundkurs 2009 Bayern Analysis I

- I.). Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Die in der Abbildung angegebenen Punkte $P(1|3)$, $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$ und $N_3(4|0)$ sind Punkte von G_f .



- a) Geben Sie den Funktionsterm von f in der Form $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$ an, indem Sie passende Werte für $a, b, c \in \mathbb{R}$ ermitteln. Zeigen Sie, dass sich dieser in der Form $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ schreiben lässt.

- b) Weisen Sie nach, dass N_2 Wendepunkt von G_f ist, und ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Wendetangente.

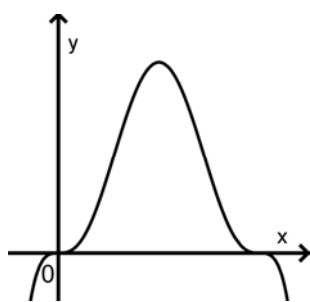
[Zur Kontrolle: Tangentengleichung $y = -4x + 8$]

- c) Die Wendetangente schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck ein. Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.

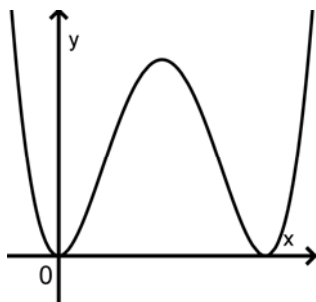
Betrachtet wird nun die Integralfunktion

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) \cdot dt \quad \text{mit } D_F = \mathbb{R}.$$

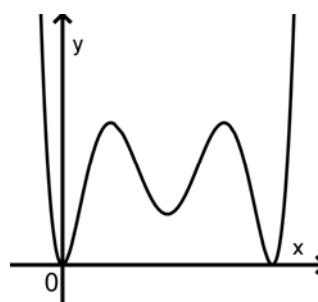
- d) Berechnen Sie $F(4)$. Was folgt daraus für die beiden Flächenstücke, die der Graph G_f mit der x -Achse im I. und im IV. Quadranten einschließt? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie nun die Summe der Inhalte dieser beiden Flächenstücke.
- e) Einer der drei abgebildeten Graphen I, II oder III stellt den Graphen von F dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht in Betracht kommen.



Graph I



Graph II



Graph III

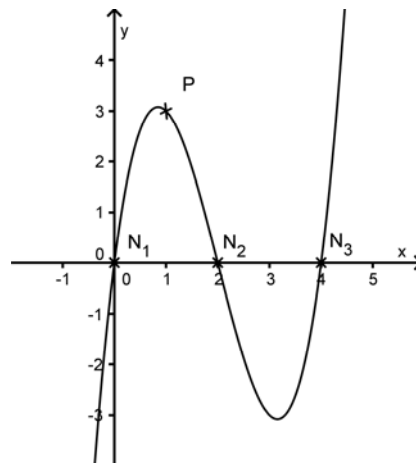
- f) Bekanntlich ist jede Integralfunktion der Funktion f auch Stammfunktion von f . Begründen Sie, dass jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle hat. Geben Sie den Term einer Stammfunktion von f an, die keine Integralfunktion von f ist.

2. In der Medizin wird radioaktives Jod-123 zur Untersuchung der Schilddrüse eingesetzt. Kurze Zeit nach der Verabreichung dieser Substanz an den Patienten wird die von der Substanz ausgehende Strahlung gemessen, wodurch Rückschlüsse auf den Zustand der Schilddrüse möglich sind. Durch radioaktiven Zerfall verringert sich die Substanzmasse. Die im Körper des Patienten noch vorhandene Masse m des verabreichten Jod 123 lässt sich durch den Term $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$ mit $k > 0$ beschreiben. Dabei gibt m_0 die zum Zeit-punkt $t = 0$ verabreichte Jodmasse an; t ist die Maßzahl der seit Verabreichung vergangenen Zeit in Stunden.
- a) Nach einer Zeit von 13,2 Stunden ist nur noch die Hälfte der verabreichten Jodmasse vorhanden. Bestimmen Sie hieraus den Wert des Parameters k .
- [Zur Kontrolle: $k \approx 0,0525$]
- b) Wie viel Prozent der verabreichten Jodmasse sind vier Stunden nach Verab-reichung im Körper des Patienten noch vorhanden? Wie lange dauert es, bis 90 % der verabreichten Jodmasse zerfallen sind?

Lösung der Abituraufgabe Grundkurs 2009 Bayern Analysis I
(verfasst von Reinhard Seidl)

I.) Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit dem Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$. Die in der Abbildung angegebenen Punkte $P(1|3)$, $N_1(0|0)$, $N_2(2|0)$ und $N_3(4|0)$ sind Punkte von G_f .

a) Geben Sie den Funktionsterm von f in der Form $f(x) = a(x-b)(x-c)(x-d)$ an, indem Sie passende Werte für $a, b, c \in \mathbb{R}$ ermitteln. Zeigen Sie, dass sich dieser in der Form $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ schreiben lässt.



In der gegebenen Form sind die Nullstellen bei $x_1 = b$, $x_2 = c$ und $x_3 = d$, weil dann die jeweilige Klammer gleich 0, und damit das gesamte Produkt gleich 0 wird.

Setzt man die gegebenen Nullstellen ein, so erhält man:

$$f(x) = a \cdot (x - 0) \cdot (x - 2) \cdot (x - 4)$$

$$f(x) = a \cdot x \cdot (x - 2) \cdot (x - 4) \rightarrow f(x) = a \cdot (x^3 - 6x^2 + 8x)$$

Um den Wert von a zu ermitteln, setzt man die Koordinaten von $P(1 | 3)$ ein:

$$3 = a \cdot (1^3 - 6 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1) \rightarrow 3 = a \cdot (1 - 6 + 8) \rightarrow 3 = a \cdot 3 \Rightarrow a = 1$$

Die gesuchte Funktion lautet daher: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ (was zu zeigen war)

b) Weisen Sie nach, dass N_2 Wendepunkt von G_f ist, und ermitteln Sie die Gleichung der zugehörigen Wendetangente.

[Zur Kontrolle: Tangentengleichung $y = -4x + 8$]

Um Wendepunkte zu bestimmen, benötigt man die 2. Ableitung.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8 \rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6 \rightarrow \neq 0, \text{ also ist die hinreichende Bedingung für WP erfüllt}$$

Setzt man nun $f''(x) = 0$, so ergibt sich $6x - 12 = 0$ und damit $x = 2$

Der Punkt $(2 | 0)$, also N_2 ist ein Wendepunkt.

Für die Wendetangentengleichung benötigt man zunächst die Steigung in WP, also bei $x = 2$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 = 12 - 24 + 8 = -4 \rightarrow \text{vorläufige Tangentengleichung: } y = -4x + b$$

Zur Bestimmung von b setzt man die Koordinaten von WP $(2 | 0)$ ein:

$$0 = -4 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 8 \quad \text{Daher lautet die Wendetangente: } y = -4x + 8 \quad (\text{wie angegeben})$$

- c) Die Wendetangente schließt mit den Koordinaten-achsen ein Dreieck ein. Bestimmen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks.

Die Wendetangente bildet mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 2 (Nullstelle) und 8 (y-Achsenabschnitt).

Der Schnittwinkel mit der x-Achse ergibt sich aus der Steigung der Wendetangente $y = -4x + 8$.

Sie hat die Steigung $m = \tan(\alpha) = -4$. Daraus ergibt sich der Schnittwinkel mit der x-Achse:

$$\tan(\alpha) = -4 \rightarrow \alpha = 75,76^\circ$$

Da der Winkel beim Ursprung 90° ist, ist der Schnittwinkel mit der y-Achse $\beta = 90^\circ - 75,76^\circ$, also $\beta = 14,04^\circ$.

Betrachtet wird nun die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_0^x f(t) \cdot dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

- d) Berechnen Sie $F(4)$. Was folgt daraus für die beiden Flächenstücke, die der Graph G_f mit der x-Achse im I. und im IV. Quadranten einschließt? Begründen Sie Ihre Antwort. Bestimmen Sie nun die Summe der Inhalte dieser beiden Flächenstücke.

$$F(t) = \int_0^t (t^3 - 6t^2 + 8t) \cdot dt = \left[\frac{1}{4} \cdot t^4 - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \right]_0^t$$

$$\text{Dann ist } F(4) = \left[\frac{1}{4} \cdot t^4 - 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot t^3 + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \right]_0^4 = \left[\frac{1}{4} \cdot t^4 - 2 \cdot t^3 + 4 \cdot t^2 \right]_0^4$$

$$F(4) = \left(\frac{1}{4} \cdot 4^4 - 2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 \right) - (0) = 64 - 128 + 64 = 0$$

Wenn das Integral gleich 0 ist, bedeutet das, dass die Fläche oberhalb der x-Achse („positive Fläche“) und die Fläche unterhalb der x-Achse („negative Fläche“) gleich groß sind, da sich die beiden Flächen wegen der unterschiedlichen Vorzeichen gegeneinander aufheben.

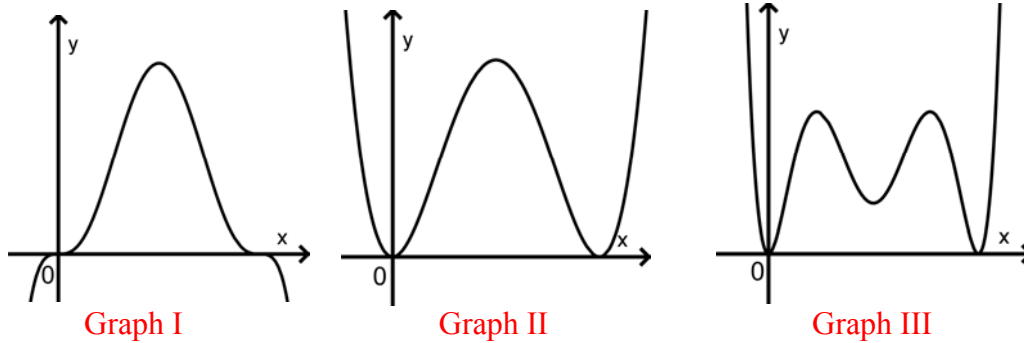
Fläche oberhalb der x-Achse A_1 : (von 0 bis 2)

$$A_1 = \left[\frac{1}{4} \cdot t^4 - 2 \cdot t^3 + 4 \cdot t^2 \right]_0^2 = \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 \right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 \right)$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{4} \cdot 16 - 2 \cdot 8 + 4 \cdot 4 \right) - (0 - 0 + 0) = 4 - 16 + 16 = 4 \text{ F.E.}$$

Da die Fläche unterhalb der x-Achse dann ebenfalls 4 F.E. hat, ist die Summe der Inhalt der beiden Flächenstücke gleich 8 F.E.

- e) Einer der drei abgebildeten Graphen I, II oder III stellt den Graphen von F dar. Geben Sie an, welcher dies ist, und begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie erklären, warum die beiden anderen Graphen nicht in Betracht kommen.



Graph III

Kommt nicht infrage, weil er eine Funktion 6. Grades darstellt (5 Extrema). Die Ableitung wäre dann eine Funktion 5. Grades. Da aber $f(x)$ (die Ableitung von $F(x)$) nur 3. Grades ist, kommt der Graph III nicht infrage.

Graph I

Kommt nicht infrage, weil er im Intervall $]-\infty; 2[$ positive Steigung hat, der Ableitungsgraph $f(x)$ zeigt aber im Intervall $]-\infty; 0[$ negative Steigung an (d.h. er verläuft unterhalb der x-Achse) und im Intervall $]0; 2[$ positive Steigung an, d.h. er verläuft oberhalb der x-Achse.

Also kommt nur der Graph II als Stammfunktion $F(x)$ infrage.

- f) Bekanntlich ist jede Integralfunktion der Funktion f auch Stammfunktion von f . Begründen Sie, dass jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle hat. Geben Sie den Term einer Stammfunktion von f an, die keine Integralfunktion von f ist.

$$I_a(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt = F(x) - F(a)$$

Für $x = a$ ist dieses Integral also $F(a) - F(a) = 0 \rightarrow$ hat also bei $x = a$ eine Nullstelle

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \quad \text{Schiebt man diese Funktion jetzt um } r \text{ nach oben, so hat } F(x)$$

keine Nullstellen mehr und ist daher keine Integralfunktion mehr.

$$\text{Also: } F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + r \text{ ist keine Integralfunktion von } f(x).$$

2. In der Medizin wird radioaktives Jod-123 zur Untersuchung der Schilddrüse eingesetzt. Kurze Zeit nach der Verabreichung dieser Substanz an den Patienten wird die von der Substanz ausgehende Strahlung gemessen, wodurch Rückschlüsse auf den Zustand der Schilddrüse möglich sind. Durch radioaktiven Zerfall verringert sich die Substanzmasse. Die im Körper des Patienten noch vorhandene Masse m des verabreichten Jod 123 lässt sich durch den Term $m(t) = m_0 \cdot e^{-kt}$ mit $k > 0$ beschreiben. Dabei gibt m_0 die zum Zeit-punkt $t = 0$ verabreichte Jodmasse an; t ist die Maßzahl der seit Verabreichung vergangenen Zeit in Stunden.
- a) Nach einer Zeit von 13,2 Stunden ist nur noch die Hälfte der verabreichten Jodmasse vorhanden. Bestimmen Sie hieraus den Wert des Parameters k .
[Zur Kontrolle: $k \approx 0,0525$]

Es muss gelten:

$$\frac{m_0}{2} = m_0 \cdot e^{-k \cdot 13,2} \quad \parallel \text{ beide Seiten durch } m_0 \text{ dividieren}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-k \cdot 13,2} \quad \parallel \text{ beide Seiten logarithmieren}$$

$$\ln(0,5) = -k \cdot 13,2 \cdot \ln(e) \quad \parallel \text{ da } \ln(e) = 1 \text{ ist}$$

$$\ln(0,5) = -k \cdot 13,2 \quad \parallel : (-13,2)$$

$$k = \frac{\ln(0,5)}{-13,2} = 0,05251115 \approx 0,0525 \quad (\text{stimmt mit der angegebenen Lösung überein})$$

- b) Wie viel Prozent der verabreichten Jodmasse sind vier Stunden nach Verabreichung im Körper des Patienten noch vorhanden?

Es ist gegeben, dass $t = 4$ Std. ist.

$$m(4) = m_0 \cdot e^{-0,0525 \cdot 4}$$

$$m(4) = m_0 \cdot e^{-0,21}$$

$$m(4) = m_0 \cdot 0,810584246$$

Nach 4 Stunden sind also noch ca. 81,06 % des Jods vorhanden.

Wie lange dauert es, bis 90 % der verabreichten Jodmasse zerfallen sind?

Wenn 90% zerfallen sind, sind noch 10% vorhanden.

$$0,1 \cdot m_0 = m_0 \cdot e^{-0,0525 \cdot t} \quad \parallel \text{ geteilt durch } m_0$$

$$0,1 = e^{-0,0525 \cdot t} \quad \parallel \text{ beide Seiten logarithmieren}$$

$$\ln(0,1) = -0,0525 \cdot t \cdot \ln(e) \quad \parallel \ln(e) = 1$$

$$\ln(0,1) = -0,0525 \cdot t \quad \parallel \text{ beide Seiten : } (-0,0525)$$

$$\frac{\ln(0,1)}{-0,0525} = t$$

$$t = 43,85876368 \approx 43,86 \text{ Std } (\rightarrow \text{ ca. } 43 \text{ Std. } 51 \text{ min } 30 \text{ s})$$

Nach ca. 44 Stunden sind 90 % des Jods zerfallen.